〔1〕

Ⅰ.

問 1

$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ ・・・(答)

解説

重力と弾性力を別々に扱ったときの運動方程式 $ma=-kX-mg$ と運動方程式 $ma=-kx$

ばねの自然長の位置を $X=0$ とする X 軸を鉛直上方にとり，小球の加速度を a とすると，その運動方程式は $ma=-kX+(-mg)$ である。

ここで，$-mg$ は定数だから，$-k$ を比例定数とする式に組み込み，

$ma=-k\left(X-\dfrac{mg}{k}\right)$ とし，さらに $X-\dfrac{mg}{k}=x$ とおくことで，

小球の運動方程式を外力が弾性力のみの運動方程式の形 $ma=-kx$ に単純化できる。

また，$\dfrac{1}{2}kx^2$ を位置エネルギーとする力学的エネルギー保存則

$\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kx^2=$ 一定（単振動運動の力学的エネルギー保存則）

が成り立つ。

この変形は定数扱いできる力であれば可能であるので，

動摩擦力など一定の向きに一定の大きさの非保存力を受ける物体の単振動運動の場合，運動方程式の単純化ばかりでなく力学的エネルギー保存則まで適用できるので非常に便利である。

たとえば，非保存力として動摩擦力が一定の向きに働いている場合，

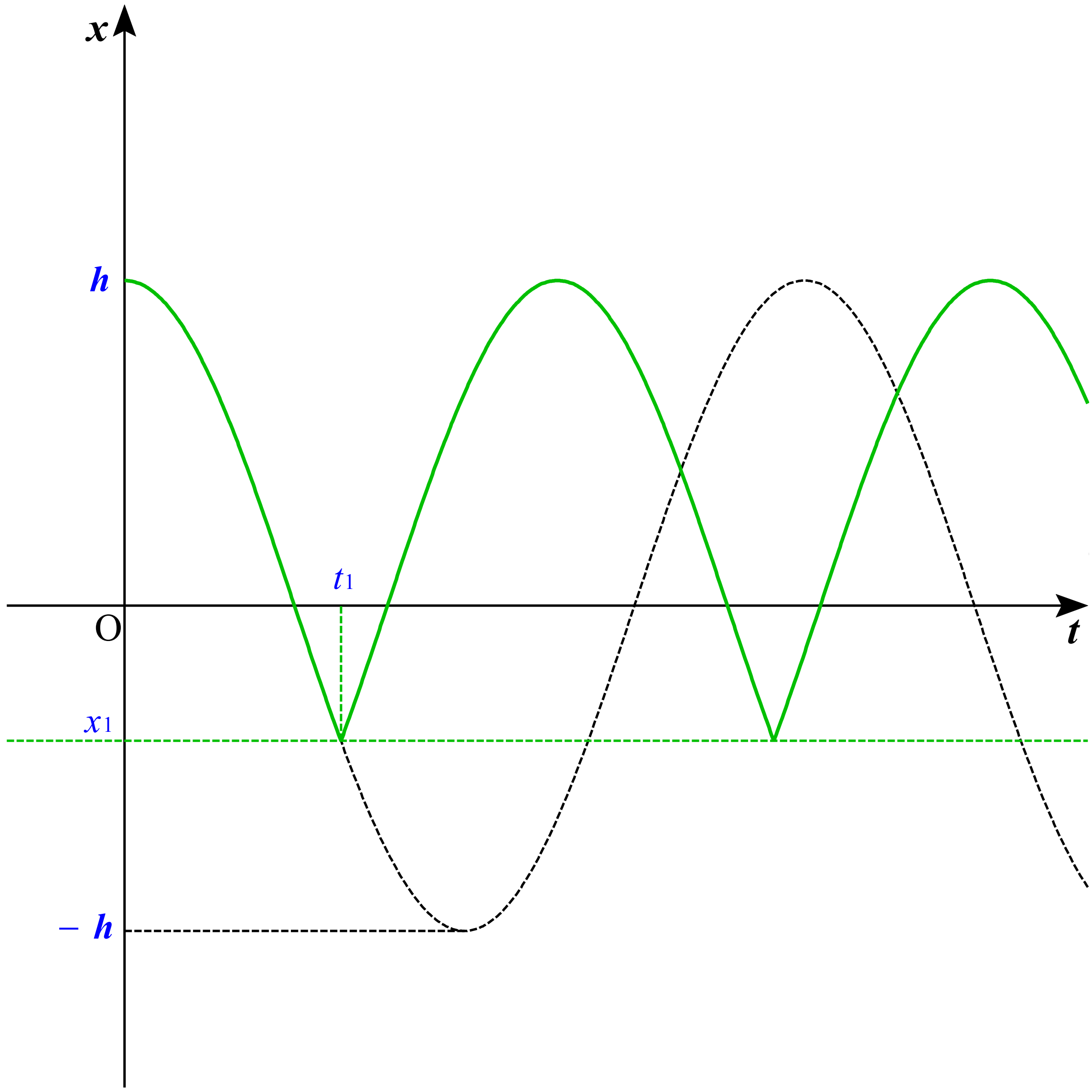
運動方程式を $ma=-kx$ に変形することで，

滑らかな面上での保存力による運動として扱える。

(物理小ネタ「単振動・単振動の力学的エネルギー保存則」参照)

Ⅱ.

問 2



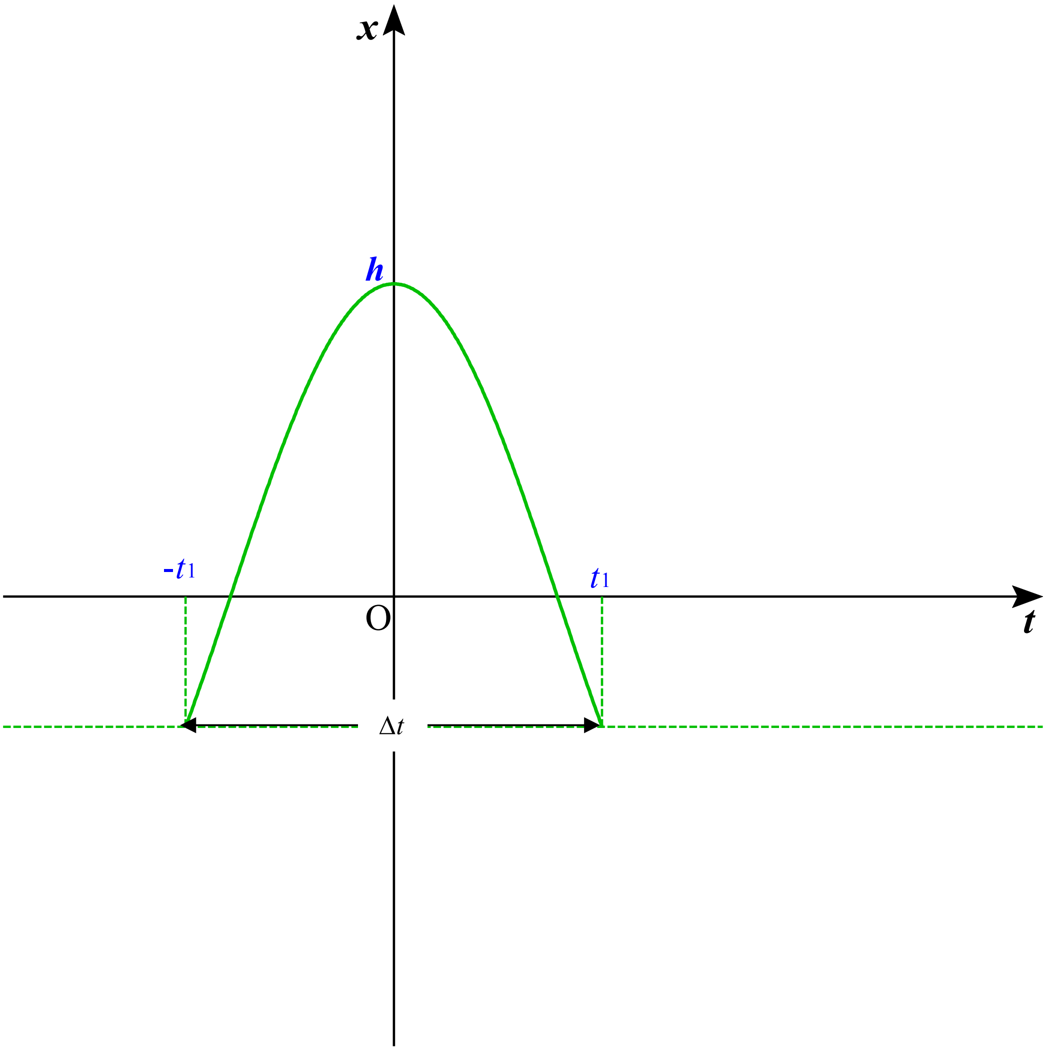
問 3

(1)

t 軸負方向に仮の曲線を描き加えると，

x 軸に関する対称性より， $\Delta t = 2t_1$ ・・・(答)

ポイント：三角関数のグラフや放物線は対称性に注目



(2)

$T : t_1 = 2\pi : \theta_1 \quad \therefore \theta_1 = \dfrac{2\pi t_1}{T}$ ・・・(答)

(3)

$\Delta t = 2t_1$ より， $\theta_1 = \dfrac{2\pi t_1}{T} = \dfrac{\pi \Delta t}{T}$ ・・・(答)

(4)

$x_1 = h\cos\theta_1 = h\cos\dfrac{\pi\Delta t}{T}$ より， $\cos\dfrac{\pi\Delta t}{T} = \dfrac{x_1}{h}$ ・・・(答)

Ⅲ.

問 4

(1)

単振動運動の力学的エネルギー保存則（問 1 の解説参照）より,

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k{x_1}^2=\frac{1}{2}kh^2 \qquad \therefore v_0=\sqrt{\frac{k}{m}\left(h^2-{x_1}^2\right)} \quad ・・・(答)$$

(2)

衝突直後の小球の速さは ev_0

単振動の力学的エネルギー保存則（問 1 の解説参照）より,

$$\frac{1}{2}k{h_1}^2=\frac{1}{2}m(ev_0)^2+\frac{1}{2}k{x_1}^2 \qquad \therefore h_1=\sqrt{\frac{m}{k}e^2{v_0}^2+{x_1}^2} \quad ・・・(答)$$

(3)

衝突を繰り返すたびに振幅が小さくなるから,

床の位置が単振動の振動端点に近づいていく。

よって, Δt は $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ に近づいていく。

ゆえに, 長くなる。 ・・・(答)

実際,

n 回目の衝突直後の速さを v_n とすると,

$$\frac{v_1}{v_0}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{v_3}{v_2}=\cdots=\frac{v_n}{v_{n-1}}=e$$

$$\therefore \frac{v_1}{v_0}\cdot\frac{v_2}{v_1}\cdot\frac{v_3}{v_2}\cdot\cdots\cdot\frac{v_n}{v_{n-1}}=e^n$$

$$\therefore v_n=e^n v_0$$

$0<e<1$ より, $\lim_{n\to\infty} v_n=0$

単振動の振動端点における小球の速さは 0 だから,

$n\to\infty$ のとき, 衝突位置は振動端点と一致する。

すなわち $\Delta t=T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ となる。

問 5

n 回目の衝突直後の速さを v_n

$\dfrac{v_1}{v_0}=\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{v_3}{v_2}=\cdots=\dfrac{v_n}{v_{n-1}}=e$ より， $\dfrac{v_1}{v_0}\cdot\dfrac{v_2}{v_1}\cdot\dfrac{v_3}{v_2}\cdots\cdots\dfrac{v_n}{v_{n-1}}=e^n$

$\therefore v_n=e^n v_0$ ・・・(答)

n 回衝突後の最高位置 h_n

$$\frac{1}{2}kh_n{}^2=\frac{1}{2}mv_n{}^2+\frac{1}{2}kx_1{}^2$$
$$=\frac{1}{2}me^{2n}v_0{}^2$$

$\therefore h_n=\sqrt{\dfrac{m}{k}\left(e^n v_0\right)^2+x_1{}^2}$ ・・・(答)

問 6

$0<e<1$ より，

$$h_n=\sqrt{\frac{m}{k}\left(e^n v_0\right)^2+x_1{}^2}\xrightarrow{n\to\infty}h_n=x_1$$

よって，振幅 $|x_1|$，周期 $\Delta t=T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ の単振動運動となる。

あるいは，

$0<e<1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}e^n v_0=0$$

単振動の振動端点における小球の速さは 0 だから，

$n\to\infty$ のとき，衝突位置は振動端点と一致する。

すなわち振幅 $|x_1|$，周期 $\Delta t=T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ の単振動運動となる。

問 7

$t=0$ のときの単振動運動の力学的エネルギーは， $\dfrac{1}{2}kh^2$

$n\to\infty$ のときの単振動運動の力学的エネルギーは， $\dfrac{1}{2}kx_1{}^2$

よって，失われた力学的エネルギーは， $\dfrac{1}{2}k\left(h^2-x_1{}^2\right)$ ・・・(答)

〔2〕

Ⅰ.

問 1

・鉄心中をつらぬく磁束は鉄心に巻かれたすべてのコイルからの寄与の総和
・1 巻きコイルに電流 I_0 を流したときの磁束は $L_0 I_0$
より,
n_1 回巻きのコイルに電流 I_1 を流したとき鉄心中に生じる磁束は,
$n_1 L_0 I_1$ ・・・(答)

問 2

コイル 1 の自己インダクタンスを L_1, 誘導起電力を V_1 とすると, $V_1 = -L_1 \dfrac{\Delta I}{\Delta t}$

また, $\Delta\Phi = n_1 L_0 \Delta I$ より, $V_1 = -n_1 \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -n_1 \dfrac{n_1 L_0 \Delta I}{\Delta t} = -n_1{}^2 L_0 \dfrac{\Delta I}{\Delta t}$

$\therefore L_1 = n_1{}^2 L_0$ ・・・(答)

問 3

スイッチを閉じた直後のコイルには電流が流れないから,
抵抗 r による電位降下は 0 である。
よって, 誘導起電力を V_1' とすると, キルヒホッフの第 2 法則より, $E + V_1' = 0$
$\therefore V_1' = -E$ ・・・(答)

問 4

$\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 0$ となるから, 誘導起電力は 0
このときコイルを流れる電流を I_1' とすると,

キルヒホッフの第 2 法則より, $E + 0 = rI_1'$ $\therefore I_1' = \dfrac{E}{r}$

$\therefore \Phi = n_1 L_0 I_1' = \dfrac{n_1 L_0 E}{r}$ ・・・(答)

問 5

誘導起電力により, 電流 $I_1' = \dfrac{E}{r}$ を b から a の向きに流し続けようとするから,

b から a に向けての電位降下は $RI_1' = \dfrac{RE}{r}$

よって, b を基準にした a の電位は, $-\dfrac{RE}{r}$ ・・・(答)

問 6

時刻を t とすると，b から見た a の電位は，

$T_0 \le t \le T_1$ のとき

a の電位は電池の正極と等電位，b の電位は電池の負極と等電位

よって，b に対する a の電位は E

スイッチを切った瞬間，すなわち $t = T_1$ のとき

レンツの法則により，磁束の変化を妨げるべく $I_1' = \dfrac{E}{r}$ の電流を b から a の向きに流し続けようとする誘導起電力がコイル 1 に発生する。

このとき b から a の向きに $R \cdot \dfrac{E}{r} = 3r \cdot \dfrac{E}{r} = 3E$ の電位降下が生じる。

よって，b に対する a の電位は $-3E$

$T_1 < t \le T_2$ のとき

コイルに蓄えられていた磁界のエネルギーが主にジュール熱として徐々に失われ，b と a の電位が等しくなっていく。すなわち 0 に近づいていく。

補足

時刻 T_1 からの電流の変化の式と b から見た a の電位の式を求めてみる。

ある瞬間において回路を流れる電流を I とすると，

キルヒホッフの第 2 法則より，$-L_1 \dfrac{dI}{dt} = (R + r)I$

$$\therefore \frac{dI}{I} = -\frac{R + r}{L_1} dt$$

$$\therefore \int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R + r}{L} dt$$

時刻 T_1 からの時間は $t - T_1$（$T_1 \le t$）だから，

$\log I = -\dfrac{R + r}{L_1}(t - T_1) + \alpha$（$\alpha$ は積分定数，$\log I$ は数学の自然対数表示）

$$\therefore I = e^{-\frac{R+r}{L_1}(t - T_1) + \alpha}$$

$t = T_1$ のとき $I = \dfrac{E}{r}$ より，$\dfrac{E}{r} = e^{\alpha}$

これと $R = 3r$ より，

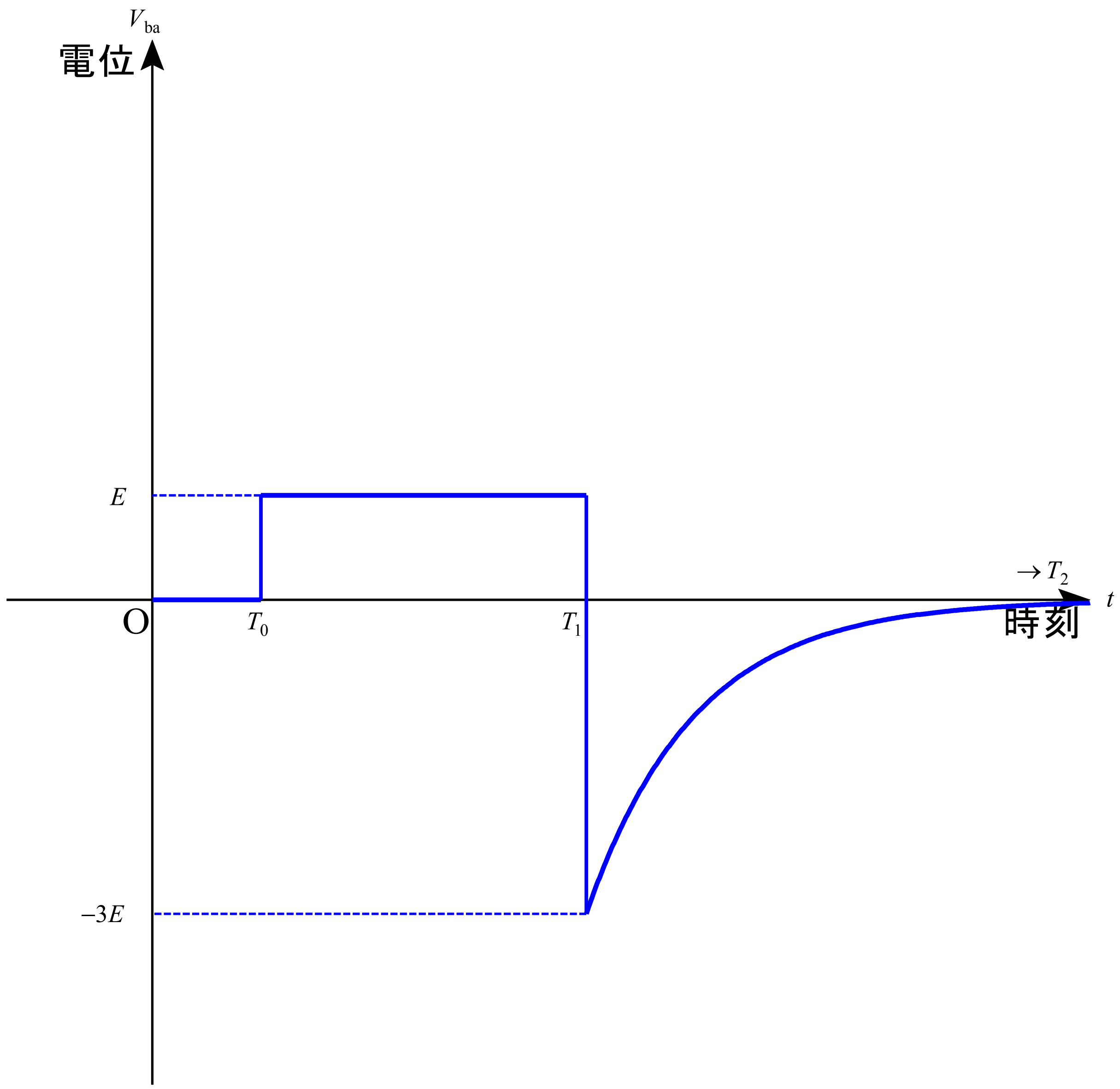
時刻 t（$T_1 \le t$）において回路を流れる電流は，$I = \dfrac{E}{r} e^{-\frac{4r}{L_1}(t - T_1)}$

$I = \dfrac{E}{r} e^{-\frac{4r}{L_1}(t - T_1)}$ より，抵抗 R での電位降下は，$R = 3r$ より，

$3rI = 3r \cdot \dfrac{E}{r} e^{-\frac{4r}{L_1}(t - T_1)} = 3Ee^{-\frac{4r}{L_1}(t - T_1)}$

よって，b に対する a の電位 V_{ba} は，

$V_{\mathrm{ba}} = -3Ee^{-\frac{4r}{L_1}(t - T_1)}$



Ⅱ.

(7)

鉄心中に生じる磁束は I の関数だから，$\Phi(I)$ と表すと，$\Phi(I)=n_1L_0I$

$\therefore \Delta\Phi=\Phi(I+\Delta I_1)-\Phi(I)=n_1L_0(I+\Delta I_1)-n_1L_0I=n_1L_0\Delta I_1$

よって，コイル 2 に発生する誘導起電力は,

$$-n_2\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-n_1n_2L_0\frac{\Delta I_1}{\Delta t}\quad\cdots\text{(答)}$$

(8)

コイル 1，コイル 2 の磁束の変化量をそれぞれ $\Delta\Phi_1$，$\Delta\Phi_2$ とすると,

$\Delta\Phi_1=n_1L_0\Delta I_1$，$\Delta\Phi_2=n_2L_0\Delta I_2$

よって，コイル 1 に流れる電流 I_1 とコイル 2 に流れる電流 I_2 がともに変化する場合にコイル 2 に発生する誘導起電力は,

$$-n_2\frac{\Delta\Phi_1+\Delta\Phi_2}{\Delta t}=-n_2\left(n_1L_0\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+n_2L_0\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right)$$

$$=-n_2L_0\left(n_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+n_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right)\quad\cdots\text{(答)}$$

(9)

$$-n_1L_0\left(n_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+n_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right)\quad\cdots\text{(答)}$$

(10)

コイル 2 に発生する誘導起電力はゼロだから,

$$-n_2L_0\left(n_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+n_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right)=0$$

$n_2L_0\neq 0$ より,

$$n_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+n_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}=0$$

よって,

コイル 1 の誘導起電力は,

$$-n_1L_0\left(n_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}+n_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\right)=-n_1L_0\times 0$$

$$=0\quad\cdots\text{(答)}$$

(11)

$\Delta\Phi=n_1\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}+n_2\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t}$，$n_1\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}+n_2\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t}=0$ より,

$\Delta\Phi=0\quad\cdots$(答)

(12)

コイル 1 の誘導起電力が 0 だから,

キルヒホッフの第 2 法則より, $E + 0 = rI_1$

$\therefore I_1 = \dfrac{E}{r}$ ・・・(答)

(13)

$n_1 \dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} + n_2 \dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} = \dfrac{n_1 \Delta I_1 + n_2 \Delta I_2}{\Delta t} = 0$ より,

$n_1 \Delta I_1 + n_2 \Delta I_2 = 0$ ・・・①

条件より, $I_2 = 0 + \Delta I_2 = \Delta I_2$ ・・・②

スイッチ S_1 を閉じる前のコイル 1 の誘導起電力は 0 だから,

コイル 1 の回路を流れる電流は 0 である。

よって, $I_1 = 0 + \Delta I_1 = \Delta I_1$ ・・・③

①, ②, ③より,

$n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0$

$\therefore I_2 = -\dfrac{n_1}{n_2} I_1$ ・・・(答)

〔3〕

熱力学問題における立式のコツ

・気体の状態量を，たとえば(P,V,n,T)のように成分表示する。
　定性的に考える手間が軽減される。
　気体の状態をメモすることにもなり，状態変化の過程を追いやすい。

・$PV=nRT$ から導かれる比例式$\dfrac{PV}{nT}=$一定 または$\dfrac{nT}{PV}=$一定 を活用する。
　これは化学の「気体の法則と性質」についてもいえる。

・定圧（等圧）変化，定積（等積）変化，等温変化，断熱変化を見極め，
　それぞれの状態変化についての熱力学第一法則の式を立てる。

・熱力学第一法則の式が立てやすくなるように系の範囲を設定する。

A 系と B 系の気体の物質量は 1mol で共通だから，系の状態量を(P,V,T)で表す。

問 1

つり合いの圧力をP_0とすると，

A$(P_0, 2V_0, T_\mathrm{A})$，B$(P_0, V_0, T_\mathrm{B})$

$$\therefore \frac{T_\mathrm{A}}{P_0\cdot 2V_0}=\frac{T_\mathrm{B}}{P_0\cdot V_0}$$

$$\therefore T_\mathrm{A}=2T_\mathrm{B} \quad ・・・(答)$$

問 2

変化後のつり合いの圧力をP_1とすると，

A$(P_1, 3V_0-V_1, T_1)$，B(P_1, V_1, T_1)

$$\therefore \frac{P_1(3V_0-V_1)}{T_1}=\frac{P_1V_1}{T_1}$$

$$\therefore 3V_0-V_1=V_1$$

$$\therefore V_1=\frac{3}{2}V_0 \quad ・・・(答)$$

問 3

系全体で考えると，

系全体としての変化は断熱変化かつ等積変化だから，

系外との熱の出入りは 0 かつ系外にする仕事は 0，

つまり，$Q=\Delta U+W$ において，$Q=0$，$W=0$ より，$\Delta U=0$

等積モル比熱をC_vとすると，

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta U_\mathrm{A}+\Delta U_\mathrm{B}\\ &= C_\mathrm{V}(T_1-T_\mathrm{A})+C_\mathrm{V}(T_1-T_\mathrm{B})\\ &= C_\mathrm{V}\{2T_1-(T_\mathrm{A}+T_\mathrm{B})\}\end{aligned}$$

$\therefore 2T_1-(T_A+T_B)=0$

ここで，$T_A=2T_B$ より，$T_A+T_B=3T_B$

よって，$T_1=\dfrac{3}{2}T_B$　・・・(答)

別解

系 A と系 B で考えると，

熱の出入りと系がする仕事は系 A と系 B の間でのみ行われるから，

系 A から系 B に移動した熱を Q_{AB}，系 A が系 B にした仕事を W_{AB}，

系 A の内部エネルギー変化を ΔU_A，系 B の内部エネルギー変化を ΔU_B とすると，

系 A についての熱力学第一法則の式は，

$-Q_{AB}=\Delta U_A+W_{AB}$　・・・①

系 B についての熱力学第一法則の式は，

$Q_{AB}=\Delta U_B+(-W_{AB})$　・・・②

①＋②より，

$0=\Delta U_A+\Delta U_B$

$$\begin{aligned}\Delta U_A+\Delta U_B&=C_V(T_1-T_A)+C_V(T_1-T_B)\\&=C_V\{2T_1-(T_A+T_B)\}\end{aligned}$$

$\therefore 2T_1-(T_A+T_B)=0$

ここで，$T_A=2T_B$ より，$T_A+T_B=3T_B$

よって，$T_1=\dfrac{3}{2}T_B$　・・・(答)

問 4

熱力学第一法則で考えると問 3 と同じである。

よって，$T_2=\dfrac{3}{2}T_B$　・・・(答)

問 5

系 A から系 B に移動した熱を Q_{AB} とする。

系 B が系 A にした仕事は 0 だから，

系 B についての熱力学第一法則の式は，

$$\begin{aligned}Q_{AB}&=\Delta U_B\\&=C_V(T_2-T_B)\end{aligned}$$

ここで，$T_2=\dfrac{3}{2}T_B$ より，

$Q_{AB}=\dfrac{1}{2}C_VT_B$　・・・(答)

問 6

断熱変化前の B 系の圧力を P_{B}' とすると，Ⅱの場合より，$\mathrm{B}\left(P_{\mathrm{B}}', V_0, T_2\right)$

断熱変化後の B 系の温度を $T_{3\mathrm{B}}$ とすると，$\mathrm{B}\left(p_3, V_3, T_{3\mathrm{B}}\right)$

よって，

$$p_3 V_3^{\frac{5}{3}} = P_{\mathrm{B}}' V_0^{\frac{5}{3}} \quad \therefore p_3 = P_{\mathrm{B}}' \left(\frac{V_0}{V_3}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$P_{\mathrm{B}}' = \dfrac{RT_2}{V_0}$ より， $p_3 = \dfrac{RT_2}{V_0}\left(\dfrac{V_0}{V_3}\right)^{\frac{5}{3}}$ ・・・(答)

問 7

断熱変化前の A 系の圧力を P_{A}' とすると，Ⅱの場合より，$\mathrm{A}\left(P_{\mathrm{A}}', 2V_0, T_2\right)$

断熱変化後の A 系の温度を $T_{3\mathrm{A}}$ とすると，$\mathrm{A}\left(p_3, 3V_0 - V_3, T_{3\mathrm{A}}\right)$

よって，

$$p_3 \left(3V_0 - V_3\right)^{\frac{5}{3}} = P_{\mathrm{A}}' \left(2V_0\right)^{\frac{5}{3}} \quad \therefore p_3 = P_{\mathrm{A}}' \left(\frac{2V_0}{3V_0 - V_3}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$P_{\mathrm{A}}' = \dfrac{RT_2}{2V_0}$ より， $p_3 = \dfrac{RT_2}{2V_0}\left(\dfrac{2V_0}{3V_0 - V_3}\right)^{\frac{5}{3}}$

問 6 より， $p_3 = \dfrac{RT_2}{V_0}\left(\dfrac{V_0}{V_3}\right)^{\frac{5}{3}}$ だから，

$$\frac{RT_2}{2V_0}\left(\frac{2V_0}{3V_0 - V_3}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{RT_2}{V_0}\left(\frac{V_0}{V_3}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{2V_0}{3V_0 - V_3}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{V_0}{V_3}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}} \frac{2V_0}{3V_0 - V_3} = \frac{V_0}{V_3}$$

$$\therefore \frac{2^{-\frac{3}{5}} \cdot 2}{3V_0 - V_3} = \frac{1}{V_3}$$

$\therefore \dfrac{2^{\frac{2}{5}}}{3V_0 - V_3} = \dfrac{1}{V_3}$

$\therefore \dfrac{\alpha^2}{3V_0 - V_3} = \dfrac{1}{V_3}$

$\therefore \alpha^2 V_3 = 3V_0 - V_3$

$\therefore V_3 = \dfrac{3}{1+\alpha^2} V_0$ ・・・(答)

問 8

選択肢：ア

系全体で考える

Ⅰの場合

系外との熱の出入りをQ，系外にする仕事をW_{I}，内部エネルギー変化をΔU_{I}とすると，

$Q = \Delta U_{\mathrm{I}} + W_{\mathrm{I}}$において，$Q = 0$，$W_{\mathrm{I}} = 0$より，$\Delta U_{\mathrm{I}} = 0$ ・・・①

Ⅱの場合

ピストンを固定したとき

系外との熱の出入りは 0，系外にする仕事も 0 だから，内部エネルギー変化は 0

よって，内部エネルギーは初期状態のままである。

また，$\mathrm{A}(P_{\mathrm{A}}', 2V_0, T_2)$より$P_{\mathrm{A}}' = \dfrac{RT_2}{2V_0}$，$\mathrm{B}(P_{\mathrm{B}}', V_0, T_2)$より$P_{\mathrm{B}}' = \dfrac{RT_2}{V_0}$だから，$P_{\mathrm{A}}' < P_{\mathrm{B}}'$

断熱変化と外力（手）が系にする仕事

$P_{\mathrm{A}}' < P_{\mathrm{B}}'$より，ピストンが自然に動く向きは，図で，左向きであることと

外力（手）でピストンを支えながら動かすことより，外力の向きは右向きである。

また，圧力が等しくなるから，ピストンの変位は左向きである。

実際，断熱変化後の B 系の体積$V_3 = \dfrac{3}{1+\alpha^2} V_0 > V_0 =$断熱変化前の体積

外力の向きとピストンの変位向きが逆なので，外力が系にする仕事は負である。

よって，系が系外にする仕事をW_{II}とすると，$W_{\mathrm{II}} > 0$

内部エネルギー変化

内部エネルギー変化をΔU_{II}とすると，

$Q = \Delta U_{\mathrm{II}} + W_{\mathrm{II}}$において，$Q = 0$，$W_{\mathrm{II}} > 0$より，

$\Delta U_{\mathrm{II}} = -W_{\mathrm{II}} < 0$ ・・・②

①，②より，

$U_{\mathrm{I}} > U_{\mathrm{II}}$

ゆえに，$T_1 > T_4$

断熱変化の微分方程式を解く（ポアソンの式）

断熱変化の微分方程式

断熱変化に対する熱力学第一法則は，$0 = \Delta U + P\Delta V$ である。

これと，$\Delta U = nC_v \Delta T$，$P = \dfrac{nRT}{V}$ であることから，

$$0 = nC_v \Delta T + \frac{nRT}{V}\Delta V$$

$$\therefore \frac{\Delta T}{T} = -\frac{R}{C_v}\cdot\frac{\Delta V}{V}$$

ここで，ΔT，ΔV について，微小変化 dT，dV をとり，

断熱変化の微分方程式とする。

すなわち

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_v}\cdot\frac{dV}{V} \quad ・・・①$$

断熱変化の微分方程式を解く

①の両辺について不定積分を行う。

$$\int\frac{dT}{T} = \int -\frac{R}{C_v}\cdot\frac{dV}{V}$$

$$\int\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_v}\int\frac{dV}{V}$$

$$\log T = -\frac{R}{C_v}\log V + \mathrm{A} \quad （\mathrm{A} は積分定数）$$

$$\log T = \log V^{-\frac{R}{C_v}} + \mathrm{A}$$

$$\log T - \log V^{-\frac{R}{C_v}} = \mathrm{A}$$

$$\log\frac{T}{V^{-\frac{R}{C_v}}} = \mathrm{A}$$

$$\log TV^{\frac{R}{C_v}} = \mathrm{A}$$

A は定数だから，

断熱変化の微分方程式の解は，

$$TV^{\frac{R}{C_v}} = 一定 \quad ・・・②$$

また，$PV = nRT$ より，$T = \dfrac{PV}{nR}$ だから，これを②に代入すると，

$$\frac{PV}{nR} \cdot V^{\frac{R}{C_v}} = 一定$$

n は系内部の気体の物質量で一定，R は気体定数だから，nR は一定である。
よって，断熱変化の微分方程式の解は，

$$PV^{1+\frac{R}{C_v}} = 一定 \quad ・・・③$$

ポアソンの式

②，③のままでもいいが，

$C_p = C_v + R$ より，$\dfrac{R}{C_v} = \dfrac{C_p - C_v}{C_v} = \dfrac{C_p}{C_v} - 1$

ここで，比熱比 $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ とおくと，

②は，$TV^{\gamma-1} = 一定$

③は，$PV^{\gamma} = 一定$

となる。

これを**ポアソンの式**または**ポアソンの法則**という。

ポアソンの式：$TV^{\gamma-1} = 一定$　または　$PV^{\gamma} = 一定$　$\left(\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}\right)$

補足

1．比熱比について

理想気体が単原子分子の場合 $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = \dfrac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \dfrac{5}{3}$

理想気体が二原子分子の場合 $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = \dfrac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \dfrac{7}{5}$

2．気体分子の運動の自由度を f とすると，$C_v = \frac{f}{2}R$

単原子分子は球状分子とするので，
xyz 座標空間の並進運動成分 x, y, z をもつから，自由度 $f = 3$
二原子分子は，直線分子とするので，
並進運動成分 x, y, z の自由度 3 と直線の傾きを任意にとるための自由度 2 をもつから，
自由度 $f = 5$
よって，

単原子分子の $C_v = \frac{3}{2}R$

二原子分子の $C_v = \frac{5}{2}R$